914. 函數方程式 $\varphi(x,y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ニ就イテ

春木　博（阪大）

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\ (x>0),$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ (x>0,\ y>0)$$ ノ間ノ

有名ナ関係式トシテ $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ガアル。次ニ $\varphi(x,y)$, $f(x)$ ヲトモニ未知函數トシテ、若干ノ解析的性質及ビ境界條件ヲ附シテ函數方程式 $\varphi(x,y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ノ解ヲ求メテ見ヨウ。

（假定）

(i) $\varphi(x,y)$ ハ $x>0$, $y>0$ デ定義サレタ一價有限實數値函數

(ii) $\varphi_{xx}(x,y)$, $\varphi_{yx}(x,y)$ ガ存在シテ連續デアル。

(iii) $\varphi(x,1)=\frac{1}{x}$, $\varphi_{xx}(x,x)\geqq\varphi_{yx}(x,x)$,

$\varphi(x,x)\geqq 0$

(iv) $f(x)$ ハ $x>0$ デ、連續デアル。

(v) 函數方程式 (F) $\varphi(x,y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ガ成立スル。

(結果) $\varphi(x,y)=B(x,y)$, $f(x)=e^{\alpha x}\Gamma(x)$

(αハ實數)

(証明)先ヅ $f(x)>0$ ナルコトハ (F) ニ於テ $y=x$ トオキ、(假定)(iii) ノ $\varphi(x,x)\geqq 0$ ヲ用フレバ判ル。$f(x)$ ガ二回微分可能ナルコトヲ証明スル。(F) ヲ y ニ關シテ α ヨリ β 迄積分スレバ $(0<\alpha<\beta)$

$$f(x)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}f(x+y)\varphi(x,y)\,dy$$

$f(x)$ ハ連續ナル故 $g_y(x,y)=f(x+y)$ ナル $g(x,y)$ 存在スル。故ニ上式ノ右辺ニ於テ部分積分ヲ行ヘバ

$$f(x)\int_{\alpha}^{\beta}f(y)\,dy=\Big[g(x,y)\varphi(x,y)\Big]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}g(x,y)\varphi_y(x,y)\,dy$$

$f(x)>0$ ナル故 $\int_{\alpha}^{\beta}f(y)=c\neq 0$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{c}\Big\{\Big[g(x,y)\varphi(x,y)\Big]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}g(x,y)\varphi_y(x,y)\,dy\Big\}$$

上式ノ右辺ハ連續微分可能ナル故 $f(x)$ モ亦連續微分可能トナル。$f(x)$ ガ二回微分可能ナルコトハ、(F) ヲ x デ

微分シタ式ニ於テ $f(x)$ ガ連續微分可能ナルコト及ビ假定(ii)ヲ用ヰテ、同様ニシテ證明サレル。

$\varphi(x,y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ヲ用ヒテ $\varphi_{xx}(x,x)\geqq\varphi_{yx}(x,x)$ ヲ書キ直セバ

$$\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f(2x)}\geqq 0$$

$f(2x)>0$ ナル故、

$$f''(x)f(x)-f'^2(x)\geqq 0$$

即チ $\log f(x)$ ガ凸函數デアル。

今 $f^*(x)=e^{-(\log f(1))x}f(x)$ ヲ考フレバ $f(x)$ ガ對數的凸函數ナルコトカラ

(i) $f^*(x)$ ハ對數的凸函數デアル。

又

(ii) $f^*(1)=1$

假定(iii)ニヨリ

(iii) $f^*(x+1)=xf^*(x)$

Artin ノ定理(Einführung in die theorie der Gammafunktion, 1931)ニヨリ(i), (ii), (iii)カラ

$$f^*(x)=\Gamma(x)$$

故ニ $\alpha=\log f(1)$ トオケバ

$$f(x)=e^{\alpha x}\Gamma(x)$$

$$g(x, y) = B(x, y)$$

（注意） 假定 (i), (ii), (iii) ヲ充ス二変数ノ函数 $g(x, y)$ トシテ, $B(x, y)$ ノ外ニ色々トアルデアラウガ、最モ簡単ナモノトシテ對稱函數ナル條件ヲ入レテ $\frac{1}{xy}$ ヲアゲルコトガ出来ル。上述ノ結果カラ例へバ $\frac{1}{xy} = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ヲ充ス連續函數 $f(x)$ （$x > 0$ デ連続）ハ存在シ得ヌコトガ判ル。